Solutions

II. $\vec{v} = \langle -3, 4\rangle$ $\vec{w} = \langle -6, -2\rangle$

1. $\|\vec{W}\| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+4} = \boxed{\sqrt{40}}$

2. $-5\vec{v} - 4\vec{w} = -5\langle -3, 4\rangle + (-4)\langle -6, -2\rangle$

$= \langle 15, -20\rangle + \langle 24, 8\rangle$

$= \boxed{\langle 39, -12\rangle}$

3. $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \|\langle -3, 4\rangle + \langle -6, -2\rangle\|$

$= \|\langle -9, 2\rangle\|$

$= \sqrt{(-9)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{81+4}$

$= \boxed{\sqrt{85}}$

4. 5. use $\vec{v} = -2\vec{i} + 8\vec{j}$

$\vec{w} = 8\vec{j}$

$\vec{t} = 4\vec{i} - \vec{j}$

4. $\vec{w} \cdot \vec{t} = (8\vec{j}) \cdot (4\vec{i} - \vec{j})$

$= (0)(4) + (8)(-1)$

$= 0 + (-8)$

$= \boxed{-8}$

5. $(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{t} = \left((-2\vec{i} + 8\vec{j}) \cdot (8\vec{j})\right)(4\vec{i} - \vec{j})$

$= \left((-2)(0) + (8)(8)\right)(4\vec{i} - \vec{j})$

$= (0 + 64)(4\vec{i} - \vec{j})$

$= 64(4\vec{i} - \vec{j})$

$= \boxed{256\vec{i} - 64\vec{j}}$

⑥ $\vec{t} \cdot \vec{0} = (4\vec{i} - \vec{j}) \cdot (0\vec{i} + 0\vec{j})$
$= (4)(0) + (-1)(0)$
$= 0 + 0$
$= \boxed{0}$

⑦. $\cos(\theta) = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{t}}{\|\vec{v}\|\|\vec{t}\|}$

$= \dfrac{(-2\vec{i} + 8\vec{j}) \cdot (4\vec{i} - \vec{j})}{\|(-2\vec{i} + 8\vec{j}\| \cdot \|4\vec{i} - \vec{j}\|}$

$= \dfrac{(-2)(4) + (8)(-1)}{\sqrt{(-2)^2 + (8)^2}\sqrt{(4)^2 + (-1)^2}}$

$= \dfrac{(-8) + (-8)}{\sqrt{4 + 64}\sqrt{16 + 1}}$

$= \dfrac{-16}{\sqrt{68}\sqrt{17}}$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{-64}{\sqrt{68}\sqrt{17}}\right)$
$= \cos^{-1}(-.47058\ldots)$
$= 118.072486\ldots$
$= \boxed{117.1^{\circ}}$

⑧ $\vec{u}_{\vec{v}} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|}(\vec{v})$

$= \dfrac{1}{\sqrt{(-2)^2 + (8)^2}}(-2\vec{i} + 8\vec{j})$

$= \dfrac{1}{\sqrt{4 + 64}}(-2\vec{i} + 8\vec{j})$

$= \dfrac{1}{\sqrt{68}}(-2\vec{i} + 8\vec{j})$

$= \boxed{\dfrac{-2}{\sqrt{68}}\vec{i} + \dfrac{8}{\sqrt{68}}\vec{j}}$

#9. $\vec{w}$ & $\vec{t}$ are orthogonal if and only if $\vec{w}\cdot\vec{t}=0$ Pg three

so $\vec{w}\cdot\vec{t} = (8\vec{j})\cdot(4\vec{i}-\vec{j})$

$= (0)(4)+(8)(-1)$

$= 0+(-8)$

$= -8$

$\neq 0 \Longrightarrow$ thus they are $\boxed{\text{NOT orthogonal.}}$

III.

$\vec{v} = 5\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$

$\vec{w} = -\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$

$\vec{t} = 2\vec{i}-\vec{k}$

10. $\|\vec{v}-\vec{w}\| = \|(5\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k})-(-\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k})\|$

$= \|(5-(-1))\vec{i}+(-2-1)\vec{j}+(-3-(-3))\vec{k}\|$

$= \|6\vec{i}-3\vec{j}+0\vec{k}\|$

$= \sqrt{(6)^2+(-3)^2+(0)^2}$

$= \sqrt{36+9+0}$

$= \boxed{\sqrt{45}}$

11. $2\vec{t}\cdot 3\vec{w} = 2(2\vec{i}-\vec{k})\cdot 3(-\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k})$

$= (4\vec{i}-2\vec{k})\cdot(-3\vec{i}+3\vec{j}-9\vec{k})$

$= (4)(-3)+(0)(3)+(-2)(-9)$

$= (-12)+(0)+(18)$

$= \boxed{6}$

12. $\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= [(-2)(-3)-(-3)(1)]\vec{i} - [(5)(-3)-(-3)(-1)]\vec{j} + [(5)(1)-(-2)(-1)]\vec{k}$

$= [6+3]\vec{i} - [-15-3]\vec{j} + [5-2]\vec{k}$

$= \boxed{9\vec{i}+18\vec{j}+3\vec{k}}$

(13) The cross product $\vec{w} \times \vec{t}$ is orthogonal to both vectors (may also use $\vec{t} \times \vec{w}$)

so $\vec{w} \times \vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$

$= [(0)(-3) - (-1)(1)]\vec{i} - [(2)(-3) - (-1)(-1)]\vec{j} + [(2)(1) - (0)(-1)]\vec{k}$

$= [0+1]\vec{i} - [-6-1]\vec{j} + [2-0]\vec{k}$

$= \boxed{\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k}}$

(14). $\sin(\theta) = \dfrac{\|\vec{v} \times \vec{t}\|}{\|\vec{v}\| \|\vec{t}\|}$

we have $\vec{v} \times \vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$

$= [(-2)(-1) - (-3)(0)]\vec{i} - [(5)(-1) - (-3)(2)] + [(5)(0) - (-2)(2)]\vec{k}$

$= [(2) - (0)]\vec{i} - [(-5) + (6)]\vec{j} + [(0) - (-4)]\vec{k}$

$= \boxed{2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}}$

Now $\|2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}\| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (4)^2}$

$= \sqrt{4 + 1 + 16}$

$= \sqrt{21}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 4 + 9} = \sqrt{38}$

$\|t\| = \sqrt{(2)^2 + (0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 0 + 1} = \sqrt{5}$

so $\sin(\theta) = \dfrac{\|\vec{v} \times \vec{t}\|}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{t}\|} = \dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{38}\sqrt{5}}$

so $\theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{38}\sqrt{5}}\right) = \sin^{-1}(.33245\ldots) = 19.4178\ldots$

$= \boxed{19.4°}$